Københavns Universitets Økonomiske Institut

**2. årsprøve 2019 V-2DM ex ret**

**Rettevejledning til skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller**

**Fredag den 18. januar 2019**

---

**Opgave 1.** Vi betragter femtegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^5 + z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 4z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^5x}{dt^5} + \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^5x}{dt^5} + \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 4t^3 + 20t^2 + 50t + 66.$$

Vi betragter tillige differentialligningen

$$(***) \qquad \frac{d^6y}{dt^6} + \frac{d^5y}{dt^5} + 5\frac{d^4y}{dt^4} + 5\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = 0.$$

(1) Vis, at $z = -1$ er en rod i polynomiet $P$, og at betingelsen

$$\forall z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^4 + 5z^2 + 4)(z + 1)$$

er opfyldt.

**Løsning.** Ved at udregne $P(-1)$ ser vi, at $P(-1) = 0$, så $z = -1$ er en rod i polynomiet $P$.

Ved at benytte polynomiers division finder vi, at betingelsen

$$\forall z \in \mathbf{C} : P(z) = (z^4 + 5z^2 + 4)(z + 1)$$

er opfyldt.

(2) Bestem samtlige rødder i polynomiet $P$.

**Løsning.** Idet

$$z^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}.$$

Dette viser, at polynomiet $P$ har rødderne $i, -i, 2i, -2i$ og $-1$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

**Løsning.** Vi finder nu, at

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) + c_5 e^{-t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

**Løsning.** Vi gætter på en løsning af formen $\hat{x} = At^3 + Bt^2 + Ct + D$, så $\hat{x}' = 3At^2 + 2Bt + C, \hat{x}'' = 6At + 2B, \hat{x}''' = 6A$ og $\hat{x}'''' = \hat{x}''''' = 0$.

Vi finder herefter, at $A = 1, B = 2, C = 1$ og $D = 3$. Den fuldstændige løsning til $(**)$ er derfor

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) + c_5 e^{-t} + t^3 + 2t^2 + t + 3,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(* * *)$.

**Løsning.** Det karakteristiske polynomium for differentialligningen $(***)$ er $Q(z) = zP(z)$, som foruden rødderne i $P$ også har roden $z = 0$. Den fuldstændige løsning for differentialligningen $(* * *)$ er derfor

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) + c_5 e^{-t} + c_6,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbf{R}$.

**Opgave 2.** Vi betragter mængderne

$$A = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid \forall n \in \mathbf{N} : |z| = 1 - \frac{1}{2n} \right\}$$

og

$$B = \{ z \in \mathbf{C} \mid \forall r \in \mathbf{Q}_+ \cap [0,1] : |z| = r \}.$$

(1) Bestem det indre $A^O$ og afslutningen $\overline{A}$ af mængden $A$.

**Løsning.** Vi finder, at $A^O = \emptyset$ og $\overline{A} = A \cup \mathbf{T}$, hvor $\mathbf{T}$ er torusgruppen.

(2) Lad $(z_k)$ være en følge af punkter fra mængden $A$. Vis, at denne følge har en konvergent delfølge $(z_{k_p})$, hvis grænsepunkt $z_0 \in \overline{A}$.

**Løsning.** Da følgen $(z_k)$ er en følge på $A$, er denne følge også en følge på den kompakte mængde $\overline{A}$. Heraf følger påstanden umiddelbart.

(3) Bestem det konvekse hylster $K = \operatorname{conv}(A)$ for $A$, og godtgør, at enhver kontinuert funktion $\phi : K \to K$ har et fixpunkt.

**Løsning.** Vi finder, at

$$K = \operatorname{conv}(A) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\},$$

og enhver kontinuert funktion $\phi : K \to K$ har et fixpunkt $z^* \in K$, jvf. Brouwers fixpunktsætning.

(4) Bestem det indre $B^O$ og afslutningen $\overline{B}$ af mængden $B$, og godtgør, at

$$\overline{(B^O)} \subset \overline{B}^O.$$

**Løsning.** Vi ser, at $B^O = \emptyset$ og $\overline{B} = K$, jvf. løsningen i overstående spørgsmål.

Endvidere ser vi, at $\overline{B^O} = \emptyset$ og

$$(\overline{B})^O = K^O = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$$

Nu er påstanden åbenbar.

(5) Lad $G$ være en åben delmængde af $\mathbf{C}$. Vis, at

$$G \subseteq (\overline{G})^O.$$

**Løsning.** Det er klart, at $G \subseteq \overline{G}$, og da $G$ er åben, er påstanden klar.

(6) Lad $F$ være en afsluttet delmængde af $\mathbf{C}$. Vis, at

$$\overline{(F^O)} \subseteq F.$$

**Løsning.** Det er oplagt, at $F^O \subseteq F$, og da $F$ er afsluttet, er påstanden klar.

**Opgave 3.** Vi betragter korrespondancen $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved forskriften

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{for } x < 0 \\ [-1,2] & \text{for } x = 0 \\ [-3,3] & \text{for } x > 0 \end{cases},$$

og den funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, der er givet ved udtrykket

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R} : f(x,y) = x^2 + 2xy^2.$$

Desuden betragter vi korrespondancen $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er givet ved udtryket

$$G(y) = \begin{cases} [-2,2] & \text{for } y < 0 \\ [0,3] & \text{for } y \geq 0 \end{cases}.$$

(1) Vis, at korrespondancen $F$ ikke har afsluttet graf egenskaben, og at den hverken er nedad eller opad hemikontinuert.

**Løsning.** Grafen for korrespondancen $F$ er ikke en afsluttet mængde i $\mathbf{R}^2$, så $F$ har ikke afsluttet graf egenskaben. Lad os dernæst betragte følgen $\left(-\frac{1}{k}\right)$, som konvergerer mod 0. En følge $(y_k)$, hvor $y_k \in F(x_k)$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, kan umuligt konvergere mod $2 \in F(0)$. Dette viser, at korrespondancen $F$ ikke er nedad hemikontinuert. Lad os sluttelig betragte den åbne omegn $U = ]-2,3[$ af intervallet $[-1,2]$. Mængden $[-3,3]$ er imidlertid ikke en delmængde af $U$, og derfor er $F$ ikke opad hemikontinuert i $x_0 = 0$.

(2) Bestem den maksimale værdifunktion $v_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som er defineret ved udtrykket

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : v_u(x) = \max\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}.$$

**Løsning.** Vi ser, at

$$v_u(x) = \begin{cases} x^2, & \text{for } x < 0 \text{ med } y = 0 \\ 0, & \text{for } x = 0 \text{ med } y \in [-1,2] \\ x^2 + 18x, & \text{for } x > 0 \text{ med } y = \pm 3 \end{cases}.$$

(3) Bestem en forskrift for den maksimale værdikorrespondance $M_u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, hvor

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : M_u(x) = \{y \in F(x) \mid f(x,y) = v_u(x)\}.$$

**Løsning.** Fra det overstående får vi straks, at

$$M_u(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{for } x < 0 \\ [-1,2], & \text{for } x = 0 \\ \{-3,3\} & \text{for } x > 0 \end{cases}.$$

(4) Bestem en forskrift for den sammensatte korrespondance $H = G \circ F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$H(x) = G \circ F(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y) = \begin{cases} [0,3], & \text{for } x < 0 \\ [-2,3], & \text{for } x \geq 0 \end{cases}.$$

**Opgave 4.** Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{3}} (e^t - 2x^2 - u^2)\, dt,$$

hvor $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 0$ og $x(1) = \sqrt{3}$.

(1) Vis, at dette optimale kontrolproblem er et maksimumsproblem.

**Løsning.** Vi opstiller først Hamiltonfunktionen

$$H = H(t,x,u,p) = e^t - 2x^2 - u^2 + p(x+u),$$

og heraf finder vi, at

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -4x + p = -\dot{p} \text{ og } \frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p = 0,$$

og desuden ser vi, at

$$H'' = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Denne Hessematrix er negativ definit, og derfor er der tale om et maksimumsproblem.

(2) Opstil Hamiltonfunktionen $H = H(t, x, u, p)$, og bestem det optimale par $(x^*, u^*)$.

**Løsning.** Vi har allerede opstillet Hamiltonfunktionen, og fra de ovenstående udregninger finder vi, at $p = 2u$, at $u = \dot{x} - x$ og at $\dot{p} = 2\dot{u}$. Heraf finder vi så, at $-2\dot{u} = -4x + 2u$ og dermed, at $-4x + 2\dot{x} - 2x = -2\ddot{x} + 2\dot{x}$. Nu ser vi så, at $\ddot{x} - 3x = 0$, og det karakteristiske polynomium for den lineære, homogene andenordens differentialligning er $P(\lambda) = \lambda^2 - 3$. De karakteristiske rødder er således $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

Vi ser nu, at

$$x = Ae^{\sqrt{3}t} + Be^{-\sqrt{3}t}, \text{ hvor } A, B \in \mathbf{R}.$$

Da $x(0) = 0$, er $B = -A$, så

$$x = A\left(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}\right), \text{ hvor } A \in \mathbf{R}.$$

Nu er $x(\sqrt{3}) = 1$, og heraf finder vi, at $A = \frac{1}{e^3 - e^{-3}} = \frac{e^3}{e^6 - 1}$. Vi ser derfor, at

$$x^* = \frac{e^3}{e^6 - 1}\left(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}\right).$$

Vi differentiation opnås, at

$$\dot{x}^* = \frac{e^3}{e^6 - 1}\left(\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} + \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t}\right),$$

så

$$u^* = \frac{e^3}{e^6 - 1}\left((\sqrt{3} - 1)e^{\sqrt{3}t} + (\sqrt{3} + 1)e^{-\sqrt{3}t}\right).$$